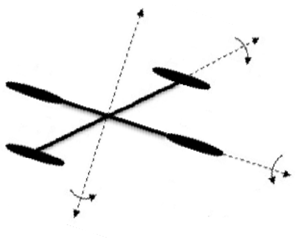
9장 벡터의 미적분
(12)



- Stokes 정리

정리 9.14 **Stokes 정리**

양의 방향을 갖는 조각별로 매끄러운 단순 폐곡선 C를 경계로 하는 조각별로 매끄러운 방향성 곡면을 S라 하자. S를 포함하는 3차원 공간 영역에서 P, Q, R 및 이의 1계 편도함수가 연속인 벡터장 $\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$에 대하여

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C (\mathbf{F} \cdot \mathbf{T})\, dS = \iint_S (\text{curl}\, \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS \tag{2}$$

이고, 여기서 $\mathbf{n}$은 S의 방향을 가리키는 단위법선벡터이다.

$$\text{curl } \mathbf{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

$$g(x, y, z) = z - f(x, y) = 0 \longrightarrow \mathbf{n} = \frac{-\dfrac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} - \dfrac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}$$

$$\iint_S (\text{curl } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_R \left[-\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\frac{\partial f}{\partial x} - \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\frac{\partial f}{\partial y} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\right] dA$$

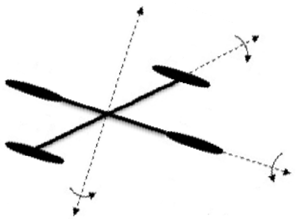
$x = x(t),\ y = y(t),\ z = f(x(t), y(t)),\ a \le t \le b$

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

$$= \int_a^b \left[P\frac{dx}{dt} + Q\frac{dy}{dt} + R\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right)\right] dt \quad \text{연쇄법칙}$$

$$= \oint_{C_{xy}} \left(P + R\frac{\partial f}{\partial x}\right) dx + \left(Q + R\frac{\partial f}{\partial y}\right) dy$$

$$= \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(Q + R\frac{\partial f}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(P + R\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right] dA \quad \text{Green의 정리}$$



$$\frac{\partial}{\partial x}\left(Q + R\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left[Q(x, y, f(x, y)) + R(x, y, f(x, y))\frac{\partial f}{\partial y}\right]$$

$$= \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial x} + R\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial x}\right) \quad \text{연쇄법칙과 곱규칙} \qquad (5)$$

$$= \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial x} + R\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial R}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}$$

이고, 이와 유사하게

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(P + R\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y} + R\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} + \frac{\partial R}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} \qquad (6)$$

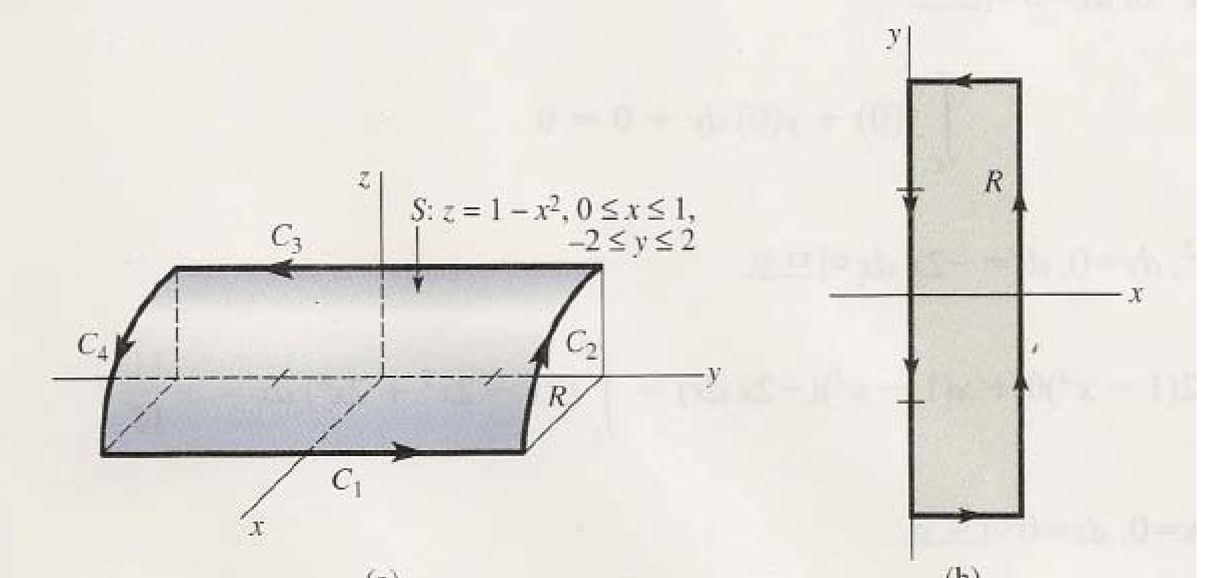
이다. (5)에서 (6)을 빼고, $\partial^2 f/\partial x\partial y = \partial^2 f/\partial y\partial x$ 임을 이용하여 정리하면, (4)는

$$\iint_R \left[-\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\frac{\partial f}{\partial x} - \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\frac{\partial f}{\partial y} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\right] dA$$

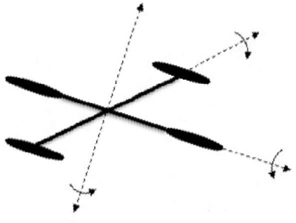
가 되는데. 이 식은 우리가 보이려고 했던 (3)의 우변과 같다. ❑

예제 1 Stokes 정리의 확인

S는 $0 \le x \le 1$, $-2 \le y \le 2$에 해당하는 포물기둥 $z=1-x^2$이다. $\mathbf{F}=xy\mathbf{i}+yz\mathbf{j}+xz\mathbf{k}$에 대하여 Stokes 정리가 성립함을 확인하라.



(a) (b)



면적분: $\mathbf{F}=xy\mathbf{i}+yz\mathbf{j}+xz\mathbf{k}$ 에서

$$\operatorname{curl}\mathbf{F}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ xy & yz & xz\end{vmatrix}=-y\mathbf{i}-z\mathbf{j}-x\mathbf{k}$$

이다. $g(x, y, z)=z+x^2-1=0$ 으로 포물기둥을 정의하면, 위 방향 법선

$$\mathbf{n}=\frac{\nabla g}{\|\nabla g\|}=\frac{2x\,\mathbf{i}+\mathbf{k}}{\sqrt{4x^2+1}}$$

이다. 그러므로

$$\iint_S(\operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})\,dS=\iint_S\frac{-2xy-x}{\sqrt{4x^2+1}}\,dS$$

이고, 우변의 면적분을 계산하기 위하여, 9.13 절의 (5)를 사용하면

$$\begin{aligned}\iint_S\frac{-2xy-x}{\sqrt{4x^2+1}}\,dS&=\iint_R(-2xy-x)\,dA\\&=\int_0^1\int_{-2}^{2}(-2xy-x)\,dy\,dx\\&=\int_0^1\left[-xy^2-xy\right]_{-2}^{2}dx\\&=\int_0^1(-4x)\,dx=-2\end{aligned}$$

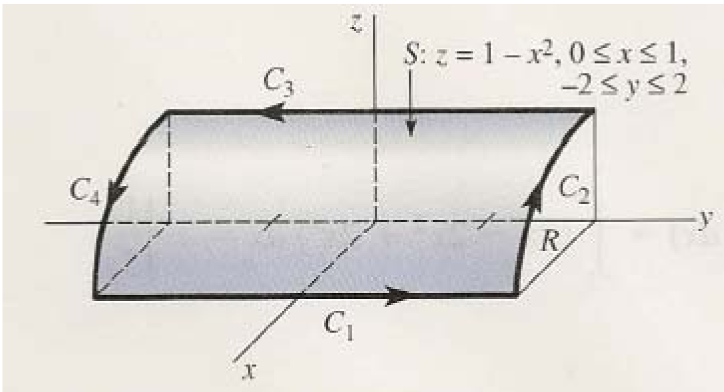
선적분: 선적분은 $\oint_C = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3} + \int_{C_4}$ 로 계산한다.

C_1: $x=1$, $z=0$, $dx=0$, $dz=0$ 이므로

$$\int_{C_1} y(0) + y(0)\,dy + 0 = 0$$

C_2: $y=2$, $z=1-x^2$, $dy=0$, $dz=-2x\,dx$ 이므로

$$\int_{C_2} 2x\,dx + 2(1-x^2)0 + x(1-x^2)(-2x\,dx) = \int_1^0 (2x - 2x^2 + 2x^4)\,dx = -\frac{11}{15}$$



C3: $x=0,\ z=1,\ dx=0,\ dz=0$이므로

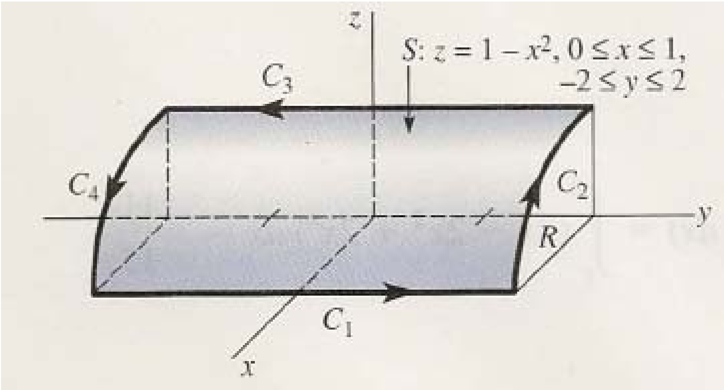
$$\int_{C_3} 0 + y\,dy + 0 = \int_{2}^{-2} y\,dy = 0$$

C_4: $y=-2,\ z=1-x^2,\ dy=0,\ dz=-2x\,dx$이므로

$$\int_{C_4} -2x\,dx - 2(1-x^2)0 + x(1-x^2)(-2x\,dx) = \int_0^1 (-2x - 2x^2 + 2x^4)\,dx = -\frac{19}{15}$$

따라서

$$\oint_C xy\,dx + yz\,dy + xz\,dz = 0 - \frac{11}{15} + 0 - \frac{19}{15} = -2$$



예제 2 Stokes 정리의 사용

$\oint_C z\,dx + x\,dy + y\,dz$를 계산하라. C는 원기둥 $x^2+y^2=1$과 평면 $y+z=2$의 교선이고 C의 방향은 위에서 보아 반시계 방향이다. 그림 9.117을 보라.

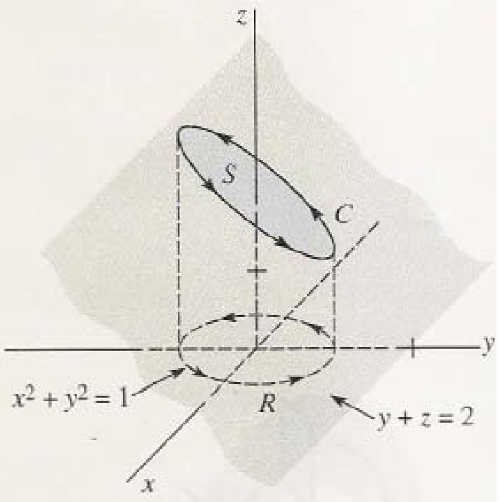


그림 9.117 예제 2의 곡선 C

풀이 $\mathbf{F} = z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$이면

$$\operatorname{curl} \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ z & x & y \end{vmatrix} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

이다. C의 방향에 의해 곡면 S는 위 방향이다. 따라서 $g(x, y, z) = y + z - 2 = 0$으로 평면을 정의하면 위 방향 법선벡터는

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla g}{\|\nabla g\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{k}$$

이다. 따라서 (2)에서

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \left[(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{k}\right)\right] dS$$

$$= \sqrt{2}\iint_S dS = \sqrt{2}\iint_R \sqrt{2}\, dA = 2\pi$$

이다. ❑